Comportamento strategico e teoria dei giochi

Giancarlo Gozzi

Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Bologna

febbraio 2018

Sommario

Teoria dei giochi ed interazione strategica

Definizione

La teoria dei giochi studia il problema di scelta razionale in situazioni di interazione strategica, cioè in tutte quelle situazioni in cui la decisione di un agente influenza le decisioni e/o il risultato di qualche altro agente.

Classi di giochi

- Possiamo distinguere due grandi classi di giochi:
  - giochi cooperativi
  - giochi non cooperativi

Classi di giochi

Definizione (Giochi cooperativi)

Si definisce gioco cooperativo una situazione di interazione strategica in cui i giocatori coordinano in modo *vincolante* le proprie scelte in vista del raggiungimento di un determinato obiettivo

Definizione (Giochi non-cooperativi)

Si definisce gioco non-cooperativo una situazione di interazione strategica in cui i giocatori scelgono le strategie in miodo da soddisfare al meglio il proprio obiettivo ed in cui non sono possibili (o non posso essere fatti valere o rispettare) eventuali accordi fra le parti in gioco.

Rappresentazione di un gioco non cooperativo

- Esistono due modi di rappresentare un gioco non-cooperativo:
  - la forma normale (o strategica)
  - la forma estensiva (o dinamica)

Rappresentazione in forma normale (o strategica) di un gioco non cooperativo

- La rappresentazione di un gioco non cooperativo in forma normale o strategica richiede la specificazione di tre elementi fondamentali che ne definiscono la struttura analitica:
  - l'insieme di giocatori N;
  - l'insieme di strategieS_i a disposizione di ciascun giocatore, con $i \in N$;
  - le preferenze u_i di ciascun giocatore rispetto alla situazione determinata dall'interazione strategica, cioè la situazione sociale che emerge dal processo decisionale, con $i \in N$

Rappresentazione in forma normale di un gioco non cooperativo

Osservazione

La rappresentazione in forma normale di un gioco non cooperativo coglie l'aspetto essenziale della situazione di interazione strategica vale a dire gli effetti che le decisioni di ciascun giocatore hanno sulle strategie e/o i risultati degli altri giocatori (ed indirettamente su sè stesso). Non interessa quindi il modo in cui il processo decisionale si svolge ma solamente l'esito finale, cioè la situazione sociale che emerge dall'interazione fra soggetti razionali. Il problema è formulato come se i giocatori dovessere prendere una decisione (strategia) in maniera simultanea, cioè non conoscendo la scelta effettuata dagli altri giocatori.

Rappresentazione in forma normale (o strategica) di un gioco non cooperativo

Osservazione

Nel seguito faremo riferimento a situazioni in cui sono coinvolti due giocatori, quindi $N = \{1, 2\}$, ed in cui ciascun giocatore dispone di un numero finito di strategie (pure) e quindin esiste un numero finito di possibili risultati o situazioni sociali come conseguenza del processo decisionale. In questo caso la forma normale del gioco non cooperativo è sintetizzata nella matrice dei pagamenti del gioco, vale a dire una tabella in cui le righe rappresentano le strategie pure di un giocatore, le colonne quelle dell'altro giocatore e in ciascuna casella della tabella figura l'insieme ordinato delle utilità (pay-off) dei giocatori.

Giochi non cooperativi in forma normale

- Nel seguito prenderemo in considerazione giochi non cooperativi in forma strategica con informazione completa ma imperfetta, vale a dire situazioni di interazione strategica in cui:
  - i giocatori conoscono la struttura del gioco (cioè della situazione di interazione strategica) vale a dire l'insieme di giocatori (sanno quindi con chi devono interagire), le strategie pure a disposizione di ciascun giocatore e le preferenze rispetto alle situazioni sociali che emergono dall'interazione. In altri termini conoscono la matrice del gioco;
  - ciascun giocatore è razionale e sa che anche gli altri giocatori sono razionali;
  - ciascun giocatore decide non avendo informazioni (o non potendo osservare) la decisione presa dagli altri giocatori.

Strategie dominanti e dilemma del prigioniero

- Consideriamo il seguente gioco in forma normale:
    - $N = \{1, 2\}$
    - $S_i = \{C, NC\}$
    - $u_i = -t$
- I due giocatori sono due individui sospettati di avere commesso un reato. Ciascun giocatore ha a disposizione due strategie, confessare oppure non confessare e t rappresenta il numero di mesi (anni) di prigione a cui sono condannati in base alle prove ottenute dal giudice.
- I due sospetti decidono la propria strategia non potendo comunicare tra di loro e quindi non conoscendo la scelta dell'altro.

Strategie dominanti e dilemma del prigioniero

- In questo gioco sono possibili quattro situazioni:
    - entrambi confessano il reato (C, C)
    - entrambi non confessano il reato (NC, NC)
    - uno confessa e l'altro non confessa: (C, NC) se confessa il primo, ma non il secondo e (NC, C) nel caso opposto.
- In generale una coppia ordinata di elementi in cui il primo indica la strategia scelta dal giocatore 1 ed il secondo la strategia scelta dall'altro giocatore rappresenta la situazione sociale che si determina per effetto dell'interazione fra le decisioni dei due giocatori.

Preferenze dei giocatori nel dilemma del prigioniero

- Per il sospetto 1 abbiamo:

$$\begin{aligned} u_1(C,NC) &= 0 \\ u_1(NC,NC) &= -1 \\ u_1(C,C) &= -6 \\ u_1(NC,C) &= -9 \end{aligned}$$

- Per il sospetto 2 abbiamo:

$$\begin{aligned} u_2(NC,C) &= 0 \\ u_2(NC,NC) &= -1 \\ u_2(C,C) &= -6 \\ u_2(C,NC) &= -9 \end{aligned}$$

Dilemma del prigioniero: la matrice del gioco

	C	NC
C	$(-6,-6)$	$(0,-9)$
NC	$(-9,0)$	$(-1,-1)$

Tabella: Matrice del giogo del dilemma del prigioniero

- Le righe della matrice corrispondono alle strategie (pure) del sospetto #1, le colonne a quelle del sospetto #2. Nelle caselle sono indicate per ciascuna combinazione di strategie le corrispondenti coppie ordinate di utilità (pay-off).

Dilemma del prigioniero: scelta razionale

- Consideriamo il problema di scelta razionale del giocatore (sospetto) #1. La matrice del gioco comporta che:

$$
\begin{align}
u_1(C, C) &> u_1(NC, C) \tag{1} \\
u_1(C, NC) &> u_1(NC, NC) \tag{2}
\end{align}
$$

cioè:

$$
\begin{align}
-6 &> -9 \tag{3} \\
0 &> -1 \tag{4}
\end{align}
$$

Dilemma del prigioniero: strategie dominate (dominanti)

- La condizione (1) afferma che la scelta razionale del giocatore #1 è quella di confessare se il giocatore #2 confessa; confessando passa 6 mesi in prigione, mentre non confessando starebbe in prigione per 9 mesi (cfr. la (3)). La condizione (2) stabilisce che la scelta razionale del giocatore #1 è quella di confessare se il giocatore #2 non confessa; confessando è libero mentre se non confessa subisce una condanna ad un mese (cfr. la (4)).

Dilemma del prigioniero: strategie dominate (dominanti)

- Le condizioni (1) - (2) stabiliscono che la strategia di non confessare, per il giocatore #1, è una *strategia dominata* ovvero che la strategia di confessare è una *strategia dominante*.
- Si noti che in questo caso in cui il giocatore dispone di due sole strategie (pure) se una delle strategie è dominata allora l'altra è dominante (e viceversa). L'implicazione non è generalizzabile al caso di tre o più strategie.

Dilemma del prigioniero: strategie dominate (dominanti)

Definizione (Strategia dominata)

Una strategia $s \in S$ si dice dominata se esiste un'altra strategia $s' \in S$ che determina un'utilità (pay-off) maggiore di s per ogni possibile scelta dell'altro giocatore. In termini più formali:

$$u(s', t) > u(s, t)$$

con $s, s' \in S$ e $\forall t \in T$ (dove abbiamo indicato con T l'insieme di strategie del secondo giocatore e con t la generica strategia).

Dilemma del prigioniero: risposta ottima

- Consideriamo nuovamente le (1)-(2); in base ad esse la strategia del giocatore #1 di confessare è la *risposta ottima* (scelta razionale) ad entrambe le possibili scelte del giocatore #2:

$$R_1 = \{(C, C), (C, NC)\} \tag{5}$$

  La risposta ottima del giocatore #1 individua tutte le situazioni sociali (gli esiti o conseguenze dell'interazione strategica) in cui il giocatore #1 si comporta in maniera razionale per ogni possibile scelta dell'altro giocatore.

- La risposta ottima del giocatore #1 caratterizza, pertanto, la corrispondente condizione di *razionalità individuale* .

Dilemma del prigioniero: risposta ottima

- Consideriamo il problema di scelta razionale del giocatore (sospetto) #2. La matrice del gioco comporta che:

$$u_2(C,C) > u_2(C,NC) \tag{6}$$
$$u_2(NC,C) > u_1(NC,NC) \tag{7}$$

cioè:

$$-6 > -9 \tag{8}$$
$$0 > -1 \tag{9}$$

Dilemma del prigioniero: scelta razionale

- La condizione (6) afferma che la scelta razionale del giocatore #2 è quella di confessare se il giocatore #1 confessa; confessando passa 6 mesi in prigione, mentre non confessando starebbe in prigione per 9 mesi (cfr. la (8)). La condizione (7) stabilisce che la scelta razionale del giocatore #2 è quella di confessare se il giocatore #1 non confessa; confessando è libero mentre se non confessa subisce una condanna ad un mese (cfr. la (9)).

Dilemma del prigioniero: scelta razionale

- Le condizioni (6) - (7) stabiliscono che la strategia di non confessare, per il giocatore #2, è una *strategia dominata* ovvero che la strategia di confessare è una *strategia dominante* (e quindi la strategia di non confessare è una strategia dominata).

Dilemma del prigioniero: strategie dominate

Definizione (Strategia dominata)

Una strategia $t \in T$ si dice dominata se esiste un'altra strategia $t' \in T$ che determina un'utilità (pay-off) maggiore di t per ogni possibile scelta dell'altro giocatore. In termini più formali:

$$u(s, t') > u(s, t)$$

con $t, t' \in T$ e $\forall s \in TS$ (dove abbiamo indicato con S l'insieme di strategie del primo giocatore e con s la generica strategia).

Dilemma del prigioniero: risposta ottima

- Consideriamo nuovamente le (6)-(7); in base ad esse la strategia del giocatore #2 di confessare è la *risposta ottima* (scelta razionale) ad entrambe le possibili scelte del giocatore #1:

$$R_2 = \{(C, C), (NC, C)\} \tag{10}$$

  La risposta ottima del giocatore #2 individua tutte le situazioni sociali (gli esiti o conseguenze dell'interazione strategica) in cui il giocatore #2 si comporta in maniera razionale per ogni possibile scelta dell'altro giocatore.

- La risposta ottima del giocatore #2 caratterizza, pertanto, la corrispondente condizione di *razionalità individuale* .

Dilemma del prigioniero: soluzione

- Nel gioco del dilemma del prigioniero la scelta per ciascun giocatore cade sulla strategia dominante e quindi la situazione sociale che emerge è quella in cui entrambi i sospetti sono condannati a 6 mesi di reclusione.
- La combinazione (C, C) è la sola che soddisfa simultaneamente la condizione di razionalità individuale per ciascun giocatore: nessuno dei due giocatori ha un incentivo a deviare dalla scelta razionale di confessare se l'altro sceglie di confessare.

Dilemma del prigioniero: soluzione

Osservazione

La matrice del gioco evidenzia che la scelta razionale determinata dal comportamento non cooperativo dei giocatori è sub-ottimale dal punto di vista collettivo, è cioè inefficiente; esiste un'altra combinazione di strategie, quella in cui entrambi non confessano, che determina risultati migliori per ciascun giocatore (un mese di prigione anzichè sei). L'inefficienza è da imputare alla natura non cooperativa del comportamento di ciascun giocatore.

Il gioco della battaglia dei sessi

- Consideriamo ora il seguente gioco non cooperativo in forma strategica in cui:
  - i due giocatori sono marito (giocatore #1) e moglie (giocatore #2);
  - le strategie per ciascun giocatore sono due: andare a teatro (T) oppure alla partita (P)

Il gioco della battaglia dei sessi

- Sono possibili quattro situazioni:
  - marito e moglie vanno assieme a teatro, (T, T);
  - marito e moglie vanno assieme alla partita, (P, P);
  - il marito va alla partita e la moglie a teatro, (P, T);
  - il marito va a teatro e la moglie alla partita, (T, P).
- Rispetto a queste possibili situazioni le preferenze del marito e della moglie sono le seguenti:

Il gioco della battaglia dei sessi: preferenze

- Preferenze del marito. Le preferenze del marito sono rappresentate dalla funzione di utilità (pay-off) u che soddisfa:

$$\begin{aligned} u(P,P) &= 10 \\ u(T,T) &= 8 \\ u(P,T) &= 6 \\ u(T,P) &= 1 \end{aligned}$$

La situazione migliore per il marito è andare alla partita in compagnia della moglie. Subito dopo, nella sua struttura di preferenze, viene l'alternativa in cui va a teatro in compagnia della moglie. Quindi viene l'alternativa in cui va da solo alla partita e per ultima la situazione in cui va da solo a teatro.

Il gioco della battaglia dei sessi: preferenze

- Preferenze della moglie. Le preferenze della moglie sono rappresentate dalla funzione di utilità (pay-off) v che soddisfa:

$$\begin{aligned} v(T,T) &= 10 \\ v(P,P) &= 8 \\ v(P,T) &= 6 \\ v(T,P) &= 1 \end{aligned}$$

La situazione migliore per la moglie è andare a teatro in compagnia del marito . Subito dopo, nella sua struttura di preferenze, viene l'alternativa in cui va alla partita in compagnia del marito. Quindi viene l'alternativa in cui va da sola a teatro e per ultima la situazione in cui va da sola alla partita.

Rappresentazione delle preferenze

Osservazione

I numeri attribuiti alle diverse situazioni servono solamente per rappresentare la struttura di preferenze dei giocatori ma non hanno alcuna relazione con l'intensità delle preferenze.

Matrice del gioco della battaglia dei sessi

- La matrice del gioco è la seguente:

	T	P
T	$(8, 10)$	$(1, 1)$
P	$(6, 6)$	$(10, 8)$

Tabella: Matrice del gioco di coordinamento

- Lungo le righe della matrice sono rappresentate le strategie del marito e lungo le colonne le strategie della moglie. In ciascuna casella la coppia ordinata di numeri reali individua l'utilità (pay-off) rispettivamente per marito e moglie della corrispondente situazione.

Scelte razionali nel gioco della battaglia dei sessi

- **Scelta razionale del marito.** Per ogni possibile scelta della moglie la scelta razionale del marito soddisfa le condizioni seguenti:

$$u(P,P) > u(T,P) \quad (11)$$
$$u(T,T) > u(P,T) \quad (12)$$

cioè:

$$10 > 1$$
$$8 > 6$$

- Sia andare alla partita che a teatro può essere la strategia razionale per il marito; dipende dalla scelta della moglie. Nessuna delle due strategie è dominata (o dominante).

Scelte razionali nel gioco della battaglia dei sessi

- **Scelta razionale della moglie.** Per ogni possibile scelta del marito la scelta razionale della moglie soddisfa le condizioni seguenti:

$$
\begin{aligned}
v(P,P) &> v(P,T) && (13)\\
v(T,T) &> v(T,P) && (14)
\end{aligned}
$$

cioè:

$$
\begin{aligned}
8 &> 6\\
10 &> 1
\end{aligned}
$$

- Entrambe le strategie possono essere razionali per la moglie; dipende dalla strategia del marito.

Osservazione

Anche per la moglie nessuna delle due strategie è dominata (dominante).

Risposta ottima nel gioco della battaglia dei sessi

- Per il marito andare alla partita è la risposta ottima quando la moglie va alla partita e andare a teatro è la risposta ottima quando la moglie va a teatro (razionalità individuale del marito); quindi:

$$R_1 = \{(P, P), (T, T)\}$$

- Per la moglie andare alla partita è la risposta ottima quando il marito va alla partita mentre andare a teatro lo è quando il marito va a teatro; quindi:

$$R_2 = \{(P, P), (T, T)\}$$

Equilibrio non cooperativo

- Analizziamo separatamente le due situazioni.
- Dalla condizione che, per entrambi, andare alla partita sia la scelta razionale quando anche l'altro coniuge va alla partita risulta che:

$$\begin{aligned} u(P,P) &> u(T,P) \qquad (15)\\ v(P,P) &> v(P,T) \qquad (16) \end{aligned}$$

- Dalla condizione che, per entrambi, andare a teatro sia la scelta razionale quando anche l'altro coniuge va a teatro si ricava che:

$$\begin{aligned} u(T,T) &> u(P,T) \qquad (17)\\ v(T,T) &> v(T,P) \qquad (18) \end{aligned}$$

Equilibrio non cooperativo

- I due sistemi di disequazioni stabiliscono che in entrambi i casi nessuno dei due giocatori ha un incentivo a cambiare la sua strategia data la strategia scelta dall'altro; se lo facesse peggiorerebbe la sua situazione. Se non c'è incentivo a cambiare la combinazione di strategie presenta le caratteristiche di una configurazione di equilibrio. Le (15)-(16) con riferimento alla combinazione di strategie (P, P) e le (17)-(18) con riferimento alla coppia di strategie (T, T) non sono altro che l'applicazione del concetto di equilibrio non cooperativo (o di Nash) al caso in esame.

Equilibrio non-cooperativo

Definizione (Equilibrio non-cooperativo)

Un equilibrio non-cooperativo di un gioco in forma normale (strategica) (Equilibrio di Nash) con N giocatori è un insieme ordinato di strategie $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*)$, una per ciascun giocatore, tale per cui la strategia di ciascun giocatore è la risposta ottima (in termini di payoff) alle strategie scelte dagli altri giocatori:

$$P_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i^*, \dots, s_N^*) \geq P_i((s_1^*, s_2^*, \dots, s_i, \dots, s_N^*) \quad s_i \neq s_i^* \tag{19}$$

e $s_i^*, s_i \in S_i$.

Equilibrio non-cooperativo

Osservazione

Un equilibrio non-cooperativo di un gioco in forma normale (strategica) è quindi un insieme di strategie, una per ciascun giocatore, tale per cui per nessun giocatore esiste una scelta alternativa s_i tale per cui:

$$P_i(s^*_{-i}, s_i) > P_i(s^*) \tag{20}$$

Forma estensiva di un gioco

- La rappresentazione in forma estensiva (o dinamica) di un gioco rappresenta la sequenza di decisioni che prendono i giocatori e specifica, per ogni stadio della sequenza, gli agenti che prendono le decisioni ed in base a quale insieme informativo.
- Lo strumento analitico che consente la rappresentazione in forma estesa del gioco è l'*albero del gioco* (o *albero decisionale*)

Esempio: il gioco del dilemma del prigioniero

- Consideriamo la rappresentazione in forma estensiva del dilemma del prigioniero.

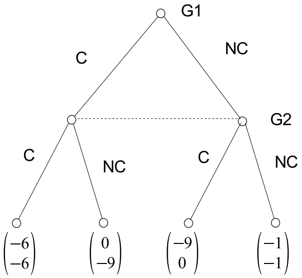


Figura: Forma estensiva del dilemma del prigioniero

Esempio: il gioco del dilemma del prigioniero

- Il gioco è rappresentato come se le decisioni fossero prese in sequenza. Il punto importante non è tanto la simultaneità delle decisioni quanto l'informazione di cui dispongono i giocatori nel momento della scelta.
- L'informazione di ciascun giocatore, al momento della scelta, è la seguente:

$$I = \{C, NC\}$$

Ciascun giocatore conosce solamente le strategie a disposizione dell'altro ma non la scelta che effettuerà.

Esempio: il gioco della battaglia dei sessi

- Consideriamo la rappresentazione in forma estensiva del gioco della battaglia dei sessi.

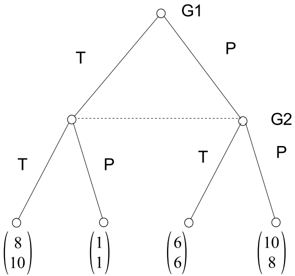
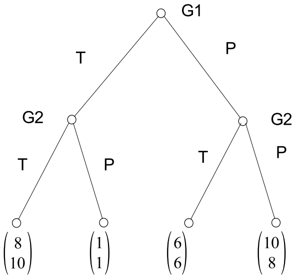


Figura: Forma estensiva della battaglia dei sessi

Esempio: il gioco della battaglia dei sessi

- Supponiamo ora che i due giocatori decidano effettivamente in sequenza: nel primo stadio del gioco decide il marito (G1) e la sua scelta è osservata dalla moglie (G2) che, sulla base di tale informazione ulteriore, prenderà la sua scelta.



Esempio: il gioco della battaglia dei sessi

- Il marito (G1) nel momento in cui deve decidere non sa che decisione prenderà la moglie; sa però che la moglie prenderà la decisione dopo di lui e sarà in grado di osservarla.
- La moglie è in grado di osservare che decisione ha preso il marito e quindi il suo insieme di informazione è il seguente:

$$I_2 = \{\{T\}, \{P\}\}$$

- La soluzione del gioco si ottiene, in questo caso, partendo dallo stadio finale del gioco, quello in cui decide la moglie.
- Se il marito sceglie di andare alla partita sa che anche la moglie, osservando la sua scelta, andrà alla partita; quindi (P, P) è un possibile esito della situazione.
- Se il marito sceglie di andare a teatro sa che anche la moglie andrà a teatro, dato che osserva la sua scelta; quindi (T, T) è l'altro possibile esito della situazione.
- I due possibili esiti coincidono con gli equilibri non cooperativi del gioco in forma normale (quando cioè marito e moglie decidono simultaneamente e quindi non sono in grado di osservare la scelta dell'altro).

- La situazione è ora la seguente:

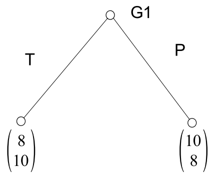


Figura: Primo stadio della battaglia dei sessi in forma estensiva

- La figura 4 rappresenta il processo decisionale del primo stadio del gioco.
- Il marito sa che la moglie osserva la sua scelta e, comportandosi in modo razionale:
  - sceglierà di andare alla partita se lui decide di andare alla partita
  - deciderà di andare a teatro se lui opta per il teatro
- La situazione finale che emerge dal processo decisionale è quindi che entrambi andranno alla partita. La confifurazione (P, P) è un *equilibrio non cooperativo perfetto.*

Equilibrio non cooperativo perfetto

Definizione

Un equilibrio non cooperativo perfetto è una combinazione di strategie che corrisponde al comportamento razionale di ciascun giocatore su ogni possibile sotto-gioco (stadio) della situazione di interazione strategica.

Giochi ripetuti

- Consideriamo il seguente gioco in forma normale:

	Q	q
Q	$(40, 40)$	$(120, 10)$
q	$(10, 120)$	$(100, 100)$

Tabella: Forma normale del gioco

- I giocatori sono due imprese che possono decidere di produrre poco (q) oppure molto (Q). Ciascuna casella della matrice indica la coppia ordianata di profitti realizzati dalle imprese.

Giochi ripetuti

- Il gioco ha la struttura di quello del dilemma del prigioniero.
- Ciascuna impresa ha una strategia dominante, produrre molto, e quindi (Q, Q) è l'equilibrio non cooperativo.
- Ciascuna impresa realizza un profitto di 40.
- Se si accordassero, per tenere bassa la produzione ed alto il prezzo di mercato, potrebbero aumentare i profitti; (q, q) non è però un equilibrio non cooperativo e ciascuna impresa non sceglierà la corrispondente strategia.
- L'equilibrio non cooperativo (Q, Q) è inefficiente.

Giochi ripetuti

- (q, q) può essere interpretata come una soluzione cooperativa; se le imprese potessero coordinare la propria scelta potrebbero realizzare un profitto superiore a quello che realizzano comportandosi in maniera non cooperativa.
- E' possibile che la configurazione (q, q) possa rappresentare un equilibrio non cooperativo?
- E' possibile se ipotizziamo che la situazione si ripeta, cioè se supponiamo che le imprese si trovino a competere su di un determinato orizzonte temporale, e se caratterizziamo opportunamente le strategie a disposizione delle imprese.

Giochi ripetuti: orizzonte di due periodi

- Supponiamo che le imprese competano su due periodi.
- In ciascun periodo la matrice del gioco è quella della tabella 3.
- Ciascuna impresa è in grado di osservare la scelta fatta dalla concorrente nel primo periodo.

Giochi ripetuti: orizzonte di due periodi

- Supponiamo che nel primo periodo le imprese "cooperino" e decidano di produrre poco (q). Che decisione prenderanno per il secondo periodo?
- Nel secondo periodo ciascuna impresa ha un incentivo a non rispettare l'accordo; rispettando l'accordo realizzano un profitto di 100, deviando dall'accordo (e supponendo che la concorrente lo rispetti) realizzerebbero un profitto di 120.
- Nel secondo stadio (periodo) la scelta di ciascuna impresa è di produrre molto.
- Nel primo stadio le imprese, comportandosi in modo razionale, decideranno, alla luce di quello che si aspettano accadrà nel secondo stadio, di produrre molto.

Giochi ripetuti: orizzonte finito

- L'equilibrio non cooperativo del gioco ripetuto due volte è quindi la ripetizione, in ciascun periodo, dell'equilibrio non cooperativo del gioco in forma normale, vale a dire in ciascun periodo le imprese decideranno di produrre molto.
- In generale il risultato non cambia se il gioco viene ripetuto n volte, con n finito in quanto nell'ultimo periodo ciascuna impresa, comportandosi in modo razionale sceglierà di produrre molto (e per induzione la conclusione vale per ciascuno dei periodi (stadi) precedenti).

Giochi ripetuti: orizzonte infinito

- Dobbiamo quindi anzitutto abbandonare l'ipotesi che n sia finito; supponiamo quindi che le imprese siano in concorrenza fra di loro per un numero di periodi molto grande, $n \to \infty$.
- L'ipotesi precedente consente di introdurre un'altra ipotesi importante, questa volta sul tipo di strategie a disposizione delle imprese; ciascuna impresa può, in modo efficace (credibile) adottare una strategia che "punisca" la concorrente per il mancato rispetto dell'accordo.

Giochi ripetuti e strategie con minaccia

- Consideriamo, per ciascuna impresa, questo tipo di strategia:
  - l'impresa produce q fintantochè l'accordo viene rispettato dalla concorrente;
  - l'impresa produce Q quando osserva che la concorrente non ha rispettato l'accordo.
- L'ultimo punto riguarda la specificazione delle preferenze; poichè l'interazione si svolge su di un orizzonte temporale (numero di periodi) multiperiodale supponiamo che l'obiettivo di ciascuna impresa sia il *flusso scontato* di profitti.

Giochi ripetuti:soluzione

- Supponiamo che le imprese si accordino per produrre poco e quindi realizzare, in ciascun periodo, un profitto pari a 100.
- Su di un orizzonte temporale infinito (molto grande) il flusso di profitti di ciascuna impresa risulta pari a:

$$\begin{aligned} V(q,q) &= 100+100\cdot\delta+100\cdot\delta^2+\cdots+100\cdot\delta^n+\cdots \\ &= 100\left(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^n+\cdots\right) \end{aligned}$$

cioè

$$V(q,q)=100\cdot\frac{1}{1-\delta}$$

in cui $\delta\in[0,1]$ è il fattore di sconto utilizzato dalle imprese per attualizzare i profitti futuri con $\delta=(1+\rho)^{-1}$ e ρ saggio di sconto.

- Supponiamo ora che una delle imprese valuti l'opportunità di non rispettare l'accordo; possiamo supporrre che ciò accada nel primo periodo. Quindi sceglierà Q nel periodo iniziale e poi q per il resto dell'orizzonte temporale.
- Il flusso di profitti dell'impresa, in questo caso, sarà pari a:

$$\hat{V} = 120 + 40 \cdot \delta + 40 \cdot \delta^2 + \cdots = 120 + 40 \frac{\delta}{1-\delta}$$

- Ciascuna impresa si comporta in modo non cooperativo e sceglierà di rispettare l'accordo se e solamente se è soddisfatta la condizione:

$$V(q,q) = 100\frac{1}{1-\delta} > 120 + 40\frac{\delta}{1-\delta} = \hat{V} \tag{21}$$

La (21) può essere utilmente riscritta in questo modo:

$$100 + 100\frac{\delta}{1-\delta} > 120 + 40\frac{\delta}{1-\delta}$$

cioè:

$$60\frac{\delta}{1-\delta} > 20 \tag{22}$$

Giochi ripetuti, equilibri non cooperativi e cooperazione

- Nella (22) il lato destro rappresenta il beneficio netto dell'impresa se devia dall'accordo; è un beneficio di *breve periodo*. Il lato sinistro rappresenta il costo, per l'impresa, del mancato rispetto dell'accordo: è il valore attuale dei minori profitti che avrà l'impresa dal periodo successivo a quello della rottura dell'accordo.
- La (22) afferma quindi che l'impresa non avrà incentivo a rompere l'accordo se i costi della decisione superano i benefici, vale a dire quando $\delta > \frac{1}{3}$ e quindi $\rho < 1$, cioè per un saggio di sconto sufficientemente piccolo.
- Se la (22) è soddisfatta l'equilibrio non cooperativo ha la caratteristica di una soluzione cooperativa (le imprese massimizzano il profitto congiunto pur comportandosi in modo non cooperativo).

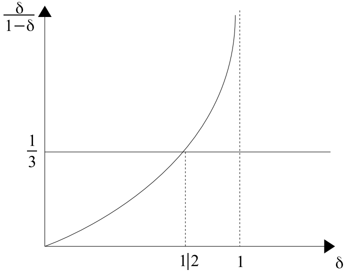


Figura: Determinazione del fattore di sconto tale per cui l'equilibrio non cooperativo è efficiente